

3. 弾塑性FEMとその他の手法

大塚 悟／長岡技術科学大学工学部

Satoru OHTSUKA／Nagaoka University of Technology

キーワード：有限要素法，極限解析，極限平衡法，剛塑性有限要素法

Key words：finite element method, plastic theorems, limit equilibrium methods, rigid plastic finite element method

3.1 斜面安定解析の数理基礎とその応用

有限要素法による斜面安定性評価は通常変形解析を用いて行われる。しかし変形解析は初期応力を始め，変形履歴によって解析結果が左右される性質がある。これは弾塑性解析の特徴であるが斜面の安定性評価上の問題となる。これに対して安定解析は斜面の極限状態を直接取り扱う点に特徴があり，変形は評価できない代わりに解析結果が初期応力などの変形履歴の影響を受けない利点がある。以下に斜面安定解析の数理基礎について解説し，その応用について述べる。

3.1.1 破壊の定義と塑性論

地盤材料の最も確からしい構成式に弾性論がある。弾性論は応力とひずみの間に1対1の関係を構築する。しかし，斜面の破壊時に地盤は非拘束流れを生じるために，地盤の応力に対して変位（ひずみ）は不定となる。このように応力とひずみの1対1関係の喪失を破壊と定義する。塑性論では塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ を導入して，ひずみを弾性ひずみと塑性ひずみの和により， $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$ と表す。斜面の破壊時に弾性ひずみは地盤応力に対して一意に定まるが，塑性ひずみが生じることにより変位の進展が説明される。塑性ひずみの発生条件は降伏関数 $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ によって表される。地盤の応力が降伏関数に到達すると塑性ひずみの発生条件が満たされる。塑性ひずみに関しては載荷・除荷の応力サイクルを与えた時に応力の成す仕事为正になる（載荷方向に塑性変形を生じる）条件から最大塑性仕事の原理が導かれている。

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_A) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \geq 0 \quad \text{または} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \geq \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad \dots\dots\dots(1)$$

上式は塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ を生じる応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は降伏関数内の任意の応力 $\boldsymbol{\sigma}_A$ ($f(\boldsymbol{\sigma}_A) \leq 0$)の中で塑性ひずみ速度との仕事率が最大になることを表わす。この性質を利用すると塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ に対して応力 $\boldsymbol{\sigma}$ を唯一定めることができる（図-1）。

連続体力学では，①力のつりあい式，②変位とひずみの関係式，③構成式（応力～ひずみ関係），④境界条件，の各方程式より応力やひずみを定めることができる。しかし，斜面の破壊時には変位が不定であることから塑性論の力

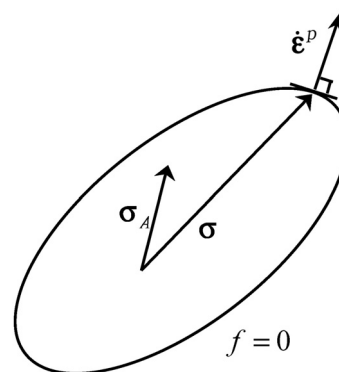


図-1 塑性ひずみ速度と応力

を借りて応力とひずみ速度間に1対1関係を構築する。この関係は（関連）流れ則と言われるが，塑性ひずみ速度の大きさは決められない。斜面安定解析では，②変位速度とひずみ速度の関係式および，③構成式（応力～ひずみ速度関係）を用いて境界値問題を構成する。①～④の関係をを用いると破壊時における斜面の応力ならびに変位速度の分布を定められる。弾塑性体は変形履歴によって変位応答が変化するが，破壊時の応力，ひずみ速度の分布は最大塑性仕事の原理より解の唯一性が保証される。

3.1.2 安定解析の数理基礎

構造物の安定性評価に関する塑性定理に極限解析がある。極限解析は2つの定理（上・下界定理）より構成される。極限解析は前述の①～④の支配方程式を厳密に解く代わりに，条件を緩和して解析を簡便にする手法である。しかし，得られた解は真の解に対して必ず大きい（上界定理）か，小さい（下界定理）ことが保証される点に特徴がある。以下に斜面安定解析にて用いられる機会の多い上界定理について概要を述べる。

上界定理では②及び④を満足する変位速度場を設定する。変位速度場は土質の運動条件を満足する必要がある，③構成式（応力～ひずみ速度関係）から規定されるダイレイタンス特性を満たす必要がある。例えば降伏関数にミーゼス型の関数を用いると塑性ひずみ速度に体積ひずみ成分がないのに対して，ドラッカー・ブラガー型の関数を用いるとせん断抵抗角 ϕ に規定される体積ひずみ

成分を有する。このような変位速度場は無数通り存在し、変形に伴う運動条件を満たすことから可容速度場と言われる。変位速度場を設定すると最大塑性仕事の原理によりひずみ速度に対応する応力が定められる。変位速度場は任意に定めているので、得られる応力はひずみ速度に対応する以外に物理的な意味がなく、①力のつり合い式を満たしていない。仮定した塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ と対応する応力 σ の内力仕事率を塑性エネルギー消散率($D(\dot{\epsilon}) = \sigma \cdot \dot{\epsilon}$)という。上界定理は外力(物体力: t)による仕事率との間に次式が成立する時に構造物は安定であることを保証する。

$$\int_V t \cdot \dot{u} dV < \int_V D(\dot{\epsilon}) dV \quad \dots\dots\dots(2)$$

斜面安定解析では地盤のせん断強度の低減率から安全率 F_s を定義することから、塑性エネルギー消散率は安全率の関数($D(F_s, \dot{\epsilon})$)となる。したがって可容速度場を仮定すると式(2)より斜面が破壊する強度低減率、すなわち安全率 F_s が求められる。上界定理は仮定した変位速度場に対して安全率が求められるために数多くの解が存在する。これらの解が真の安全率を下回らないことが保証されることから、変位速度場を様々に変化させて安全率の最小化を図ることが重要である。変位速度場にて構造物の安定性に影響を与えるのは構造物各点の変位速度の方向と相対的な大小関係(大きさ)である。破壊時の変位速度は基本的に不定であり、単位(時間の概念)当たりの変位増分の意味を有する。

3.1.3 極限平衡法の構造

分割法による極限平衡法は図-2のようにすべり線を仮定して、すべり土塊をいくつかの帯片に分割する。図には簡単のために円弧すべりの例を示した。各帯片には図-3のようにすべり線上の垂直力 N_i およびせん断力 T_i 、帯片間の断面力 E_i 、 V_i 、帯片の自重 W_i がある。帯片の分割数を n とすると未知数の数は安全率 F_s を加えて $4n+3$ となる。これらの未知数を定めるために、(i)鉛直・水平方向の力のつり合い式、(ii)すべり線でのせん断強度式、(iii)モーメントのつり合い式を用いるが、未知数に対する条件式の不足から不静定問題となることが知られ、静定化するためにいくつかの方法が提案されている。

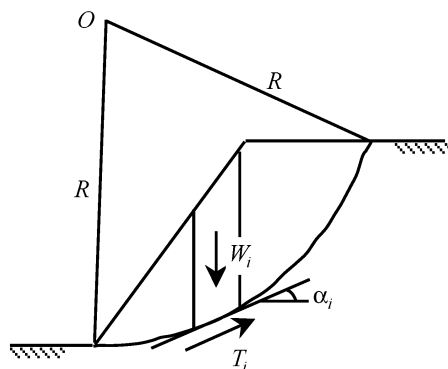


図-2 円弧すべり法

極限平衡法は斜面のすべり線を仮定して安全率を求める。その際にすべり線的位置を変化させて最小安全率を探索するが、何故安全率の最小化を行うのか、意外に明らかでない。極限平衡法で仮定するすべり線は斜面の幾何的な運動(変位速度場)を表しており、上記の条件②、④に対応する。すべり土塊は帯片に分割して鉛直・水平方向のつり合い式の外、円弧中心に関するモーメントのつり合い式を適用する。これらは条件①に対応する。すべり線上には地盤のせん断強度を仮定することから、条件③を間接的に考慮する。したがって極限状態に関する条件式①～④を全て用いており、静定化条件を加えると解が唯一求められることになる。では何故、分割法・円弧すべり解析はすべり線を変化させて安全率の最小化を図るのであろうか。

上界定理では斜面の破壊形態を任意に仮定する。図-2の円弧すべり線を仮定すると塑性エネルギー消散率は地盤の強度 τ_i に円弧の変位速度 $\dot{u} = R\dot{\theta}$ を掛けて求められ、分割帯片のすべり線長 l_i を考慮すると $\tau_i \cdot l_i \cdot R\dot{\theta}$ と表される。ここに角回転速度 $\dot{\theta}$ (または変位速度 $\dot{u}$ の大きさ)は仮に定めたものであり、後述のように解析結果には影響しない。他方、外力仕事率は円弧中心から帯片の自重 W_i の作用点までの距離 $\bar{R} = R \sin \alpha_i$ を用いて $W_i \cdot \bar{R} \dot{\theta}$ と表される。強度の低減係数を F_s とすると塑性エネルギー消散率は $(\tau_i l_i / F_s) R \dot{\theta}$ であり、上界計算式は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^n W_i \cdot R \sin \alpha_i \dot{\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i l_i}{F_s} \cdot R \dot{\theta} \quad \text{すなわち,} \\ \sum_{i=1}^n W_i \cdot R \sin \alpha_i = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i l_i}{F_s} \cdot R \quad \dots\dots\dots(3)$$

上界定理は上式から求められる低減係数 F_s が真の安全率より大きいことを保証する。したがって、上界定理ではすべり線を変化させて安全率の最小化を図ることが極めて重要である。上界計算式(3)は形式上モーメントのつり合い式と一致する。式(3)をモーメントのつり合い式ではなく上界計算式ととらえると、分割法・円弧すべり解析にて何故すべり線を変化させて安全率を最小化する必要があるのか合理的に理解できる。分割法・非円弧すべり解析の場合に用いる水平つり合い式の積分形式に関しても、同様にして上界定理における仕事式であることが確かめられる¹⁾。非円弧すべり解析の場合には帯片の

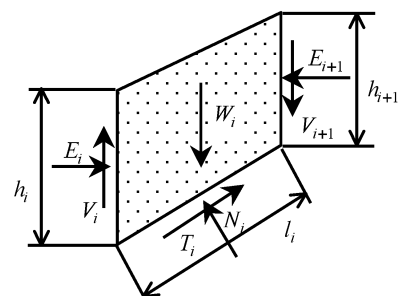


図-3 帯片に作用する力

底面のみでなく、側面においても塑性エネルギー消散が生じる点に差がある。すべり面の設定は本来、構成式から規定される運動条件を満足する必要がある。例えば円弧すべりの場合にはミーゼス型の降伏関数の場合に運動条件を満足するが、ドラッカー・ブラガー型の関数の場合に満足しない。極限平衡法では一般にすべり線におけるダイレイタンシーを考慮しないことから、運動学的可容条件が完備でなく、理論的には必ずしも最小解の存在が保証されていない。

3.1.4 剛塑性有限要素法

極限解析の上界定理を有限要素法によって解析する方法に剛塑性有限要素法がある。有限要素法を用いるとすべり線を事前に仮定する必要がなく、より合理的に安定解析を実施できる。したがって破壊機構の把握できない三次元問題の解析に優れている。塑性定理に基づいて安全率の最小化演算から定式化する方法が一般的であるが、ここでは剛塑性構成式を用いた定式化について説明する。

降伏関数に摩擦性材料にて標準的なドラッカー・ブラガー型の関数を用いる。

$$f(\sigma, F_s) = \frac{\alpha}{F_s} I_1 + \sqrt{J_2} - \frac{k}{F_s} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

斜面安定解析ではせん断強度が安全率 F_s によって低減されることから降伏関数は F_s の関数で表記される。最大塑性仕事の原理から塑性ひずみ速度に対して応力を決定することができる。非決定応力に注意すると次の構成式²⁾が誘導される。

$$\sigma = \frac{1}{F_s} \left(\frac{k - 3\alpha\beta/F_s}{\sqrt{3(\alpha/F_s)^2 + 1/2}} \dot{\epsilon}^p + \beta I \right) \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに $\dot{\epsilon}$ は塑性ひずみ速度のノルム（大きさ）、 I は単位テンソルである。また、 β はラグランジュの未定係数（非決定応力）であり、次のダイレイタンシーに関する制約条件とともに境界値問題を解析することによって定められる。

$$\dot{\epsilon}_v^p - \frac{3\alpha/F_s}{\sqrt{3(\alpha/F_s)^2 + 1/2}} \dot{\epsilon} = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

解析に当たっては、変位速度の制約条件を導入する。この条件は式(3)にて角回転速度 $\dot{\theta}$ （または $\dot{u}$ ）に仮の値を仮定することに対応する。

$$\int_V \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV = 1 \quad \dots\dots\dots(7)$$

式(5)～(7)を有限要素法に適用すると離散化形式の連立方程式が得られる。方程式は安全率 F_s 、変位速度 $\dot{\mathbf{u}}$ 、ラグランジュの未定係数 β に関する非線型方程式である。連立方程式を解くことにより変位速度分布すなわち崩壊形態と安全率が同時に求められる。剛塑性有限要素法では地盤の構成関係を用いるために極限平衡法における非静定問題は生じない。

3.1.5 剛塑性有限要素法による事例解析

単純斜面の安定解析事例を表－1に示す。斜面の傾斜角度は 30° 、単位体積重量 $\gamma_t = 16 \text{ kN/m}^3$ 、粘着力 $c = 17.5 \text{ kPa}$ としてせん断抵抗角 ϕ を変化させた。比較のためにJanbuの安定図表およびChenによる極限解析の結果⁴⁾を示した。表からせん断抵抗角によらずに剛塑性有限要素法はほぼ妥当な解を与えることが分かる。有限要素法は連続体理論に基づくために一般にすべり線のように不連続面を有する解析は得意ではない。したがって、解析結果はすべり線がせん断帯として有限な幅を有する変形領域として表現される。

地盤材料は関連流れ則を適用するとダイレイタンシー（破壊時のせん断変形による体積膨張）を過大に評価することが知られている。剛塑性有限要素法では非関連流れ則を導入することによりダイレイタンシー特性を調整することができる。この理論的背景は剛塑性有限要素法の定式化にて塑性定理によらずに直接構成関係を記述したことにある。表－2にダイレイタンシー角 ϕ_d による安全率の変化を示すが、ほとんど影響が見られない結果となった。地盤は摩擦性材料のために体積膨張が拘束されると圧力が増加して大きなせん断強度が発揮されるのに対して、斜面の場合にはすべり土塊の運動に関する拘束が少ないためにせん断強度が影響されないと考えられる。

剛塑性有限要素法で得られる変位速度場の1例²⁾を図－4に示す。(i)に斜面形状と得られた崩壊形態（変位速度場に時間を掛けて変位で表現）、(ii)にひずみ速度の分布を示した。解析条件は $c = 30 \text{ kPa}$ 、 $\phi = 17^\circ$ および $\gamma_t = 16 \text{ kN/m}^3$ を用いた。安全率は $F_s = 1.17$ である。(i)の変位図を見るとすべり土塊全体が一体化して崩壊しているが、有限要素メッシュの変形状に注目すると上部はすべり線に沿って下方に移動しているのに対して下部はすべり線に沿って剛体的に回転している。(ii)のひずみ速度の大

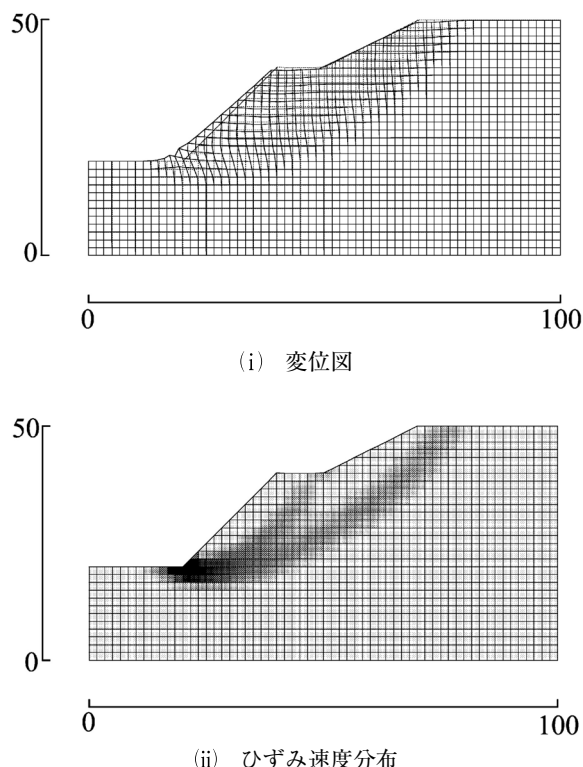
表－1 単純斜面の安定解析結果

$\phi(^{\circ})$	Janbu	Chen	RPFEM
5	0.94	1.00	0.99
15	1.40	1.50	1.48
25	1.83	2.02	1.84

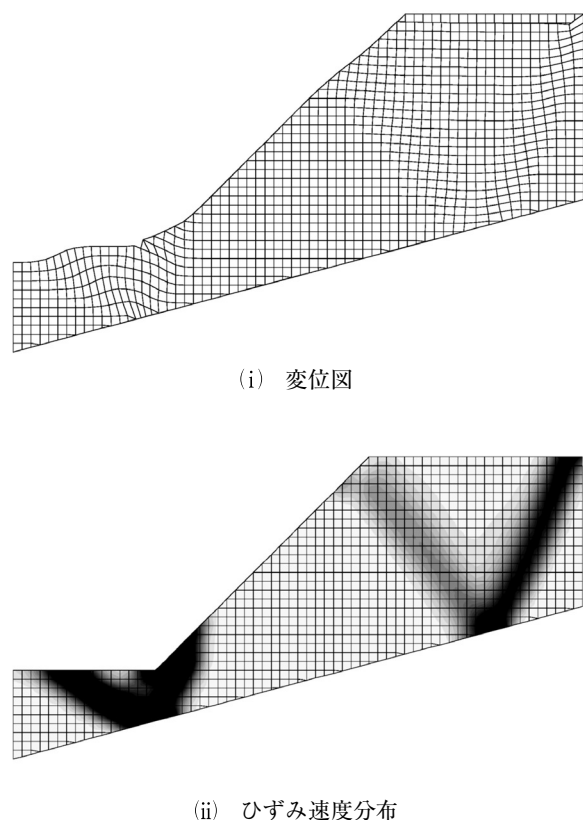
表－2 ダイレイタンシー角による安全率への影響

$\phi(^{\circ})$	$\phi_d(^{\circ})$	RPFEM
30	0	1.96
	15	1.99
	30	2.00

きさに着目すると、連続的なせん断帯が2本現れた。変位図の変形挙動は複数のせん断帯による影響を受けている。以上のように剛塑性有限要素法は連続体理論に基づくも



図－4 破壊形態とせん断帯の発生



図－5 シーム層を有する流れ盤斜面の解析結果

の、せん断の局所化域と剛体域を合理的に表現できる。

地すべりでは斜面内にすべり線が発達している事例が多い。すべり線のせん断抵抗力は斜面に対して小さいことが知られており、斜面の崩壊は既存すべり線に沿って生じる可能性が高い。このような変位速度の不連続線に対して式(5)と同様の剛塑性構成式⁵⁾を作成できる。図－5に斜面に粘土シーム層が入り、流れ盤を構成している事例³⁾を示す。斜面の地盤定数は $c = 16.5 \text{ kPa}$, $\phi = 23.9^\circ$ および $\gamma_t = 18 \text{ kN/m}^3$ である。シーム層が存在しない場合に安全率は $F_s = 1.53$ であり、破壊形態は図－5の解析領域内に納まった。シーム層は図－5の底部に設定した。シーム層以深は十分に堅いとして解析領域から除外した。シーム層の強度が $c_s = 10 \text{ kPa}$, $\phi_s = 0^\circ$ の時に図の破壊形態を得た。安全率は $F_s = 1.14$ である。(i)の変位図は斜面上部が下方へ、中央部はシーム層に沿って斜め下方へ、下部は斜面のり尻部にて隆起する破壊形態を示す。シーム層の存在により破壊形態は大きく発達している。(ii)のひずみ速度分布は斜面上部に主働楔が形成され下方に移動、下部のり尻部にて受働楔が形成されて斜面上方へ乗り上げていることを示す。シーム層に沿う変位速度はひずみ速度に換算されないために表記されていないが斜面の破壊形態が合理的に解析されている。

3.1.6 おわりに

有限要素法を用いた塑性解析の概略を極限平衡法と比較して述べた。紙枚の都合で三次元解析まで示すことが出来なかったが、三次元解析でこそ有限要素解析の本領を発揮する。未だ極限平衡法のようにハンドリングは良くないが数年の間に急速に改善されると考える。目先のことに囚われずに事例を積み重ねていくことが未だ必要である。

参考文献

- 1) 大塚 悟 (1991)：分割法による斜面安定解析の塑性力学的考察，第36回土質工学シンポジウム発表論文集，地盤工学会，pp. 13－18.
- 2) 大塚 悟・宮田善郁・池本宏文・岩部 司 (2001)：剛塑性有限要素法による斜面安定解析，地すべり，Vol. 38, No. 3, pp. 47－52.
- 3) 難波雅史 (2004)：剛塑性有限要素法による再すべり型地すべり斜面の安定解析と対策工に関する検討，長岡技術科学大学大学院修士論文.
- 4) Nash, D. F. T. (1981)：A comparative review of limit equilibrium methods of stability analysis, Slope Stability, John Wiley & Sons, pp. 11－76.
- 5) Ohtsuka, S. & Miyata, Y. (2001)：Slope stability analysis taking into account pre-existing slip lines, Proc. of 10th International Conference on International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics, Vol. 2, pp. 1601－1604.
- 6) Tamura, T. (1990)：Rigid plastic finite element method in geotechnical engineering, Computational Plasticity, pp. 15－23.

(原稿受付2004年2月12日，原稿受理2004年4月7日)