

Lecture

地すべり解析における有限要素法の利用 第5回 Finite element method for landslide analysis No.5

2. FEMによる地すべり解析の基礎理論

Fundamental theories of FEM for landslide analysis

西田憲司／(株)大林組技術研究所

Kenji NISHIDA／Technical Research Institute, Obayashi Corporation

蔣 景彩／徳島大学工学部

Jing-Cai JIANG／Faculty of Engineering, The University of Tokushima

山上拓男／徳島大学工学部

Takuo YAMAGAMI／Faculty of Engineering, The University of Tokushima

キーワード：有限要素法，地すべり，浸透，降雨，基礎理論

Key words：finite element method, landslide, seepage, rainfall, fundamental theory

2.3 降雨・地下水浸透の解析

2.3 Analysis of groundwater flow during rainfall

2.3.1 はじめに

斜面崩壊や地すべりは降雨などの影響で斜面内の間隙水圧が上昇し，土のせん断強度が低下することに起因して発生する場合が少なくない。それゆえ，斜面の安定化対策として排水工がよく利用されている。こうした水の作用による斜面崩壊や地すべりのメカニズム解明，或いは排水工効果の定量的評価を行うためには，地盤内の浸透挙動を的確に把握することが極めて重要である。有限要素法に基づく浸透流解析はそのための非常に有効なツールといってよい。解析理論と計算機の進歩に伴い，有限要素法によれば今日では不飽和，三次元，広域流れなど浸透に関するあらゆる問題に対応可能となっている。

本講座では，飽和・不飽和浸透流の支配方程式と有限要素法による定式化の大略を述べ，解析例をあげている。なお，講座の趣旨に従い式の誘導は割愛した。詳細は参考文献を参照されたい。

2.3.2 飽和・不飽和浸透流の支配方程式

地盤内における飽和領域および不飽和領域を一体とした浸透流の支配方程式は式(1)で表される¹⁾。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[k_r(\psi) k_{ij}^s \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + k_r(\psi) k_{i3} \right] - [C(\psi) + \alpha S_s] \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

ここに， x_i ：座標値， $k_r(\psi)$ ：相対透水係数， ψ ：圧力水頭， k_{ij}^s ：飽和透水係数， $C(\psi)$ ：比水分容量， α ： $\alpha = 1$ ($\psi \geq 0$)， $\alpha = 0$ ($\psi < 0$)， S_s ：比貯留係数， t ：時間。

式(1)を解くためには，解析領域内での初期条件および境界条件を設定する必要がある。

(a) 初期条件

飽和・不飽和浸透流は，土の体積含水率 θ によって挙動が大きく異なる。体積含水率は圧力水頭に依存するため，解析領域内の初期水頭分布が既知でなければならない。すなわち，座標値 x_i における時刻 $t=0$ の水頭値が

$\psi_0(x_i, 0)$ のとき

$$\psi(x_i, 0) = \psi_0(x_i, 0) \quad (2)$$

あるいは，次式(3)に示すように，不飽和領域内の体積含水率 θ を初期条件とすることもできる。

$$\theta(x_i, 0) = \theta_0(x_i, 0) \quad (3)$$

(b) 境界条件

①水頭が既知の境界

外水位と接している面においては，水頭既知の境界条件を与えることができる。すなわち，座標値 x_i における時刻 $t=t$ の水頭値が $\psi_b(x_i, t)$ のとき

$$\psi(x_i, t) = \psi_b(x_i, t) \quad (4)$$

②流量が既知の境界

降雨がある場合や井戸の揚水量が既知の場合は，流量既知の境界条件を与えることができる。座標値 x_i における時刻 $t=t$ の流量が $Q(x_i, t)$ のとき

$$\left(k_{ij}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + k_{ij} \right) n_i = -Q(x_i, t) \quad (5)$$

ここに， n_i ：境界面の垂直ベクトル。

解析領域の基盤が不透水層であれば，基盤面は流量ゼロとなり，流量既知の条件となる。こうした条件は不透水境界と呼ばれ，多くの解析ソフトにおいては特に何も入力する必要はなく，自動的に満たされる。

2.3.3 有限要素法による定式化

浸透問題の有限要素法による定式化には大別して二つの方法がある。一つは変分法に基づくもので，支配方程式と等価な汎関数を求め，それを最小にすることによって近似解を得る手法である。もう一つの方法は，重みつき残差法によるもので，支配方程式から直接有限要素近似を数学的に導く手法であり，汎関数の存在しない問題にまで拡張できる利点がある。有限要素法による浸透解析発展の初期の段階においては前者が用いられたが，近

年ではもっぱら後者が採用されている。

Galerkin法に基づく重みつき残差法^{2),3)}を用いれば、最終的に式(6)のような定式化に到達する¹⁾。

$$A_{nm}\phi_m + F_{nm} \frac{d\phi_m}{dt} = Q_n - B_n - D_n \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (6)$$

ここに、

$$A_{nm} = \sum_e k_{nl} k_{ij}^s \int_{V_e} N_l \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} dV \quad (7)$$

$$F_{nm} = \sum_e \int_{V_e} (C_l N_l N_n + N_n \alpha S_s) dV \quad (8)$$

$$Q_n = - \sum_e \int_{V_e} V N_n d\sigma \quad (9)$$

$$B_n = \sum_e k_{lr} k_{i3} \int_{V_e} N_l \frac{\partial N_n}{\partial x_i} dV \quad (10)$$

$$D_n = \sum_e \int_{V_e} S_s N_n dV \quad (11)$$

ただし、 M ：節点数、 l ：要素における各節点番号、 N_l ：節点 l における形状関数、 e ：要素数、 V ：体積、 D_n ：解析領域内の吸水および湧水量。

2.3.4 時間項の取り扱い

式(6)はある特定の時間状態に対して式(1)を有限要素法により定式化したものである。そこで時間項を取り扱うため、問題を適当な漸化式に書き下し、逐次計算を行うこととなる。漸化式として差分法を直接用いる方法と、Galerkinの重みつき残差法を各時間区分に対して用いるなどの方法があるが、以下では時間項の取り扱いが明確な差分法を用いる。差分法による漸化式としては中央差分、後退差分があり、式(6)の漸化式は以下ようになる。

(a) 中央差分

$$\left(A_{nm}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\Delta t^k} F_{nm}^{k+\frac{1}{2}} \right) \phi_m^{k+1} = 2Q_n^{k+\frac{1}{2}} - 2B_n^{k+\frac{1}{2}} - 2D_n^{k+\frac{1}{2}} - \left(A_{nm}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{2}{\Delta t^k} F_{nm}^{k+\frac{1}{2}} \right) \phi_m^k \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (12)$$

(b) 後退差分

$$\left(A_{nm}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\Delta t^k} F_{nm}^{k+\frac{1}{2}} \right) \phi_m^{k+1} = Q_n^{k+\frac{1}{2}} - B_n^{k+\frac{1}{2}} - D_n^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta t^k} F_{nm}^{k+\frac{1}{2}} \phi_m^k \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (13)$$

ここに k はある時間段階を表し、 $t = t^k$ 、 $\Delta t^k = t^{k+1} - t^k$ であり、各時間区間において以下ようになる。

$$\phi_n^{k+\frac{1}{2}} = \phi_n^k + \frac{\Delta t^k}{2\Delta t^{k-1}} (\phi_n^k - \phi_n^{k-1}) \quad (14)$$

式(12)、(13)より逐次計算の解 ϕ_n^{k+1} をGaussの消去法²⁾を用いて求めることができる。

目下の浸透問題は非線形問題であるため、解の精度を良くする目的で反復計算を導入するが、各反復過程にお

いては、

$$\phi_n^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\phi_n^k + \phi_n^{k-1}) \quad (15)$$

とする。

2.3.4 降雨時における斜面の解析例

(1) 解析条件

降雨時の斜面内間隙水圧変化を解析した例を示す。斜面の形状と有限要素メッシュ分割を図-1に示す。この問題は鉛直断面内の二次元問題である。斜面の土質は均質とし、高さは10m、勾配は1:1.5である。初期地下水面は斜面法尻高さ($z=5$ m)に存在する。土の物性および斜面法肩高さにおける初期水分特性は表-1に示したとおりである。地盤の不飽和浸透特性は図-2に示すとおりである。斜面内の初期相対飽和度は、斜面法肩高さで表-1に示す値をとり、深さ方向に直線的に増加して初期地下水位高さで飽和度100%になるよう設定した。

この斜面全体に降雨強度10mm/hour、継続時間72時間(総降雨量720mm)の降雨を与えたときの非定常解析を行った。解析にあたっては、モデル左端(下流側)

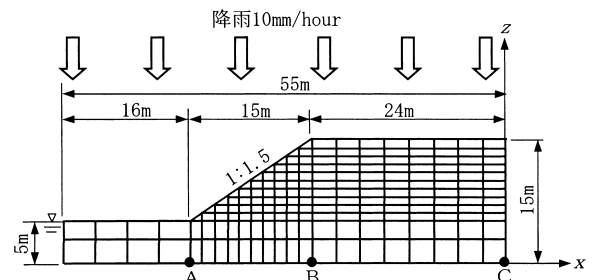


図-1 モデル斜面と有限要素メッシュ分割

表-1 土の物性と斜面法肩高さでの初期水分特性

土の物性	残留体積含水率 θ_r	0.044
	飽和体積含水率 θ_s	0.375
	飽和透水係数 k_s	6.3832×10^{-3} cm/sec
斜面法肩高さでの初期水分特性	体積含水率 θ	0.232
	飽和度 $S_r = \theta / \theta_s$	0.618
	相対飽和度 $S_e = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$	0.617

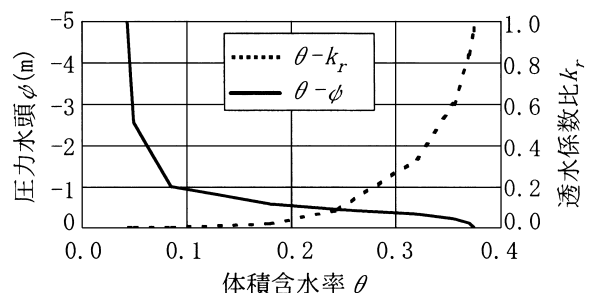


図-2 地盤の不飽和浸透特性

における地下水面が斜面法尻高さ ($z=5\text{ m}$) で一定とした。また、モデル右端 (上流側) および下端は不透水境界とした。

(2) 斜面内の圧力水頭分布

図-3には2, 24, 72時間後の圧力水頭の等高線を示した。圧力水頭ゼロのラインが地下水位を表すことになるが、降雨の浸透により斜面内の水位が上昇していく様子がわかる。また、24時間後の等高線と72時間後のそれは、ほぼ同じ形状をしているため、24時間後にはほぼ定常状態の地下水流れになったことがわかる。地下水位が24時間以降上昇しない理由は、降雨が斜面内に浸透して下流側へ流動し、解析モデルへの降雨流入量とモデル左端からの流出量がほぼ釣り合うためと考えられる。

図-4には斜面内節点A, B, Cにおける圧力水頭の時間変化を示した。降雨が斜面に浸透することにより圧力水頭が上昇し、その後ほぼ一定になることがわかる。

2.3.5 排水ボーリングが設置された斜面の解析例

(1) 解析条件

2.3.4節で取上げた斜面に排水ボーリングを設置した

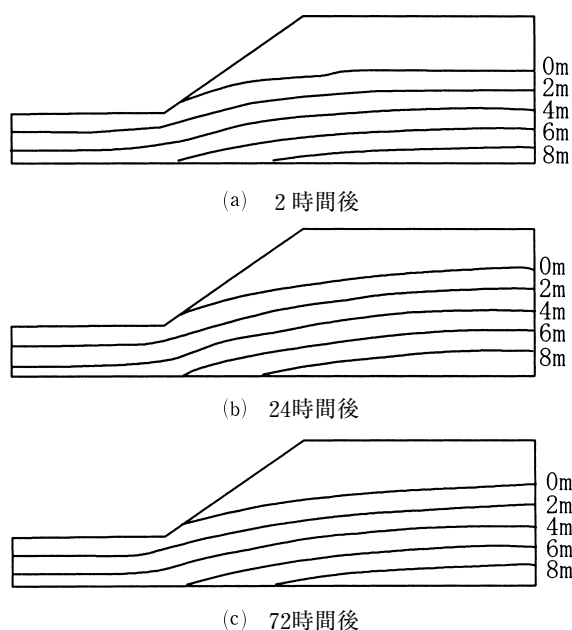


図-3 斜面内の圧力水頭の等高線

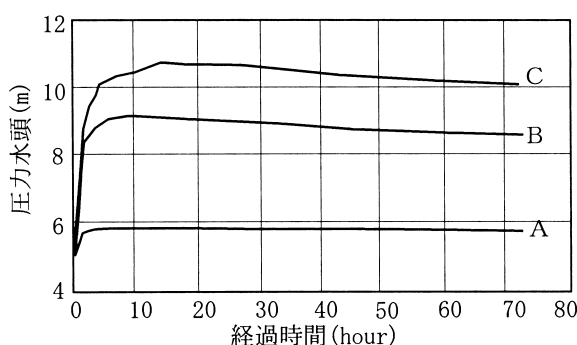


図-4 斜面内節点A~Cの圧力水頭の時間変化

場合の解析を行なった。排水ボーリングがない場合は、先述のとおり断面二次元解析が可能であったが、排水ボーリングを設置した場合には、斜面内に三次元的な流れが生じるために三次元解析が必要である。

排水ボーリングは、図-5に示すとおり斜面法尻から斜面内へ水平に長さ15m, そしてy方向に $2S=10\text{ m}$ 間隔で配置されている。そのため、図-5に示す有限要素メッシュは、三次元的な対称性を利用して分割されている。このように検討対象領域の全てを解析モデルにする必要はなく、対称性をうまく考慮することで相対的に小さなモデルで検討できる。

有限要素法に基づく排水ボーリングのモデル化にあたっては、排水ボーリングを圧力水頭ゼロの節点として取り扱う手法^{4)~6)}と排水ボーリングを透水係数を有する一次元有限要素として表現する手法がある⁷⁾。ここでは、後者の手法を用いることとし、排水ボーリングの飽和透水係数を $k^B=400\text{ cm/sec}$ とし、排水ボーリング出口部における節点の圧力水頭をゼロに規定した。排水ボーリングの不飽和浸透特性は図-6に示すものを用いた。

ここで、排水ボーリングの飽和透水係数 k^B を決定する一方法論を述べておきたい。排水ボーリングとして設置されるパイプには、大きさ、開孔率の違いなど様々なタイプがあり、それらに応じて適切な k^B を設定する必要がある。その手段として、模型実験と逆解析を用いた設定法が考えられる⁷⁾。すなわち、当該排水パイプを適当に敷設した手ごろな模型地盤について精度の高いモデル実験を行い、得られた結果から逆解析手法で実現象を最も良く説明できる透水係数 k^B を同定するのである。こうして逆解析された透水係数 k^B は、そのパイプ固有

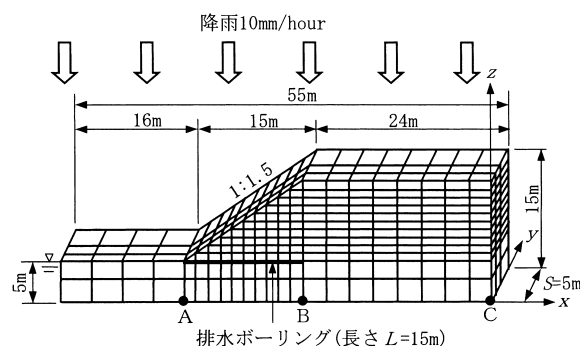


図-5 モデル斜面と有限要素メッシュ分割

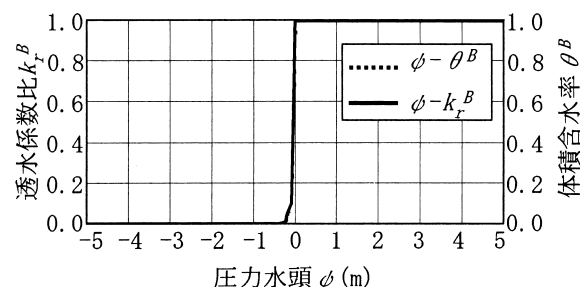


図-6 排水ボーリングの不飽和浸透特性

の普遍的な値と見なしてよく、以後当該パイプが如何なる現場で用いられる場合でも、その値を採用することができる。

(2) 斜面内の圧力水頭分布

図-7に排水ボーリングを含む断面 ($y=0\text{ m}$) およびボーリングから5 m離れた断面 ($y=5\text{ m}$) における72時間後の圧力水頭の等高線を示した。図-8には斜面内節点A, B, Cにおける圧力水頭の時間変化を示した。両図とも排水ボーリングを設置しない場合の結果も併記している。排水ボーリングを設置することにより斜面内の圧力水頭は低下しており、排水ボーリングの効果は明瞭である。なお、72時間後までの排水ボーリング1本からの合計流出流量は298.4 m^3 であった。

ここでは長さ10mの排水ボーリングを y 方向に10m間隔で設置した場合を検討したが、さらに斜面内の圧力水

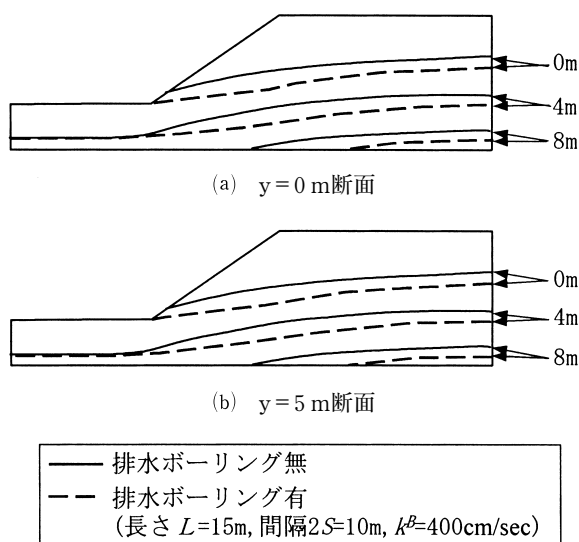


図-7 72時間後における斜面内圧力水頭の等高線

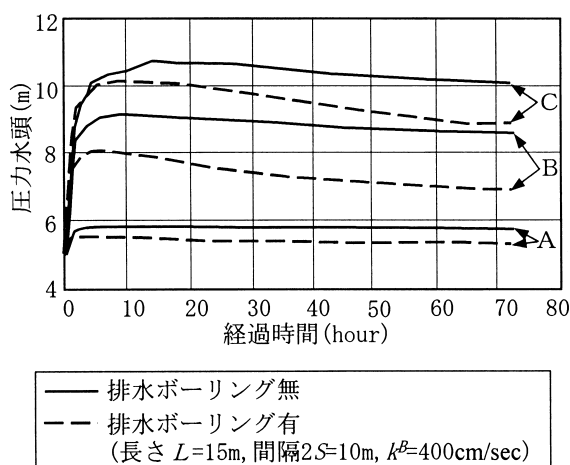


図-8 斜面内節点A~Cの圧力水頭の時間変化

頭を低下させねばならない場合は、①排水ボーリングを長くする、②設置間隔を短くする、③ボーリング径を大きくする、などの検討が必要になる。こうした検討においても、有限要素浸透流解析を用いれば容易に解が得られる。また、斜面が多層地盤から成る場合においても有限要素浸透流解析は有効である。

2.3.6 おわりに

本講座では二つの例を通して、降雨に伴う斜面内の水位 (水圧) 変化や排水ボーリング工の定量的評価が可能であることを示した。有限要素浸透流解析に際しては、個別の問題ごとに解析領域、透水係数、流入流出境界条件等を適切に設定する必要があるが、こうした点については、紙面の関係上関連文献^{8)~10)}等を参照されたい。

実際の地すべり斜面は均質ではなく成層構造や水みち等を有する複雑な地盤構成をとる場合が大半を占めている。こうした状況のもとで信頼性の高い解析結果を得るには、何よりもまず、地盤の浸透特性を的確に表現しなければならない。しかし、現況では自然地山の成層構造や水みち等を明らかにするのは技術的・経済的に見て大変困難であり、今後浸透特性に関わる地盤構成を適切に評価するための技術 (調査法や逆解析法) の開発が強く望まれる。

参考文献

- 1) 赤井浩一・大西有三・西垣 誠 (1977): 有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析, 土木学会論文報告集, 第264号, pp. 87-96.
- 2) Zienkiewicz, O. C. (1971): The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, New York.
- 3) Finlayson, B. A. (1972): The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, New York.
- 4) 駒田広也・宮口友延 (1980): 湛水池地山内浸透流に対する遮水および排水に関する考察, 電力中央研究所報告3800126.
- 5) 駒田広也・北原義浩 (1981): 層状を成す岩盤における切取斜面の浸透流解析, 電力中央研究所報告381016.
- 6) Cai, F., Ugai, K., Wakai, A. and Li, Q. (1998): Effects of horizontal drains on slope stability under rainfall by three-dimensional finite element analysis, Computers and Geotechnics, Vol. 23, pp. 255-275.
- 7) 西田憲司・山上拓男・蔣景彩 (2000): 排水ボーリング効果の定量的評価法, 地すべり, Vol. 37, No. 3 (通巻第143号), pp. 1-9.
- 8) 浅野志徳・朴 三奎・松浦純生・岡本 隆 (2000): 大規模地すべり地における融雪期の地下水流動解析, 地すべり, Vol. 36, No. 4 (通巻第140号), pp. 70-77.
- 9) 綱木亮介 (2000): 貯水池周辺の地すべり地における残留間隙水圧の実態と解析事例, ダム工学, Vol. 10, No. 1, pp. 33-41.
- 10) 井良沢道也・南雲政博・大川 滋 (2002): 三次元シミュレーション解析を用いた地下水排除工の定量的効果判定, 地すべり, Vol. 39, No. 2 (通巻第150号), pp. 34-44.

(原稿受付2003年8月20日, 原稿受理2003年9月22日)