

2. FEMによる地すべり解析の基礎理論

Fundamental theories of FEM for landslide analysis

若井明彦／群馬大学工学部

Akihiko WAKAI/Faculty of Engineering, Gunma University

蔡 飛／群馬大学工学部

Fei CAI/Faculty of Engineering, Gunma University

キーワード：有限要素法，地すべり，弾塑性，基礎理論

Key words: finite element method, landslide, elasto-plastic, fundamental theory

2.2 セン断強度低減法（SSRM）による全体安全率の計算

2.2.1 斜面の全体安全率

講座の冒頭で紹介されたように，FEMとは力学現象そのものを厳密に再現するための手段としてのみ用いられるわけではない。設計への適用を前提にした簡便な利用法がある。例えば極限平衡法で定義される安全率と同じ意味を持つ安全率を，FEMで求めることが可能である。本稿では，せん断強度低減法（以下，SSRMと略；Shear strength reduction method）に基づくFEM（例えばZienkiewicz et al.1975，鶴飼1989など）について概略を述べる。

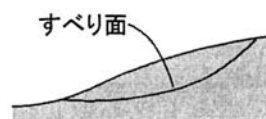
SSRMの説明に入る前に，まず全体安全率について復習をしておこう。全体安全率とは，斜面が崩壊する状態に対して現在どの程度余裕のある状態なのかを示す指標のことである。一般にはすべり土塊に作用する滑動力（もしくは滑動モーメント）の総和と，すべり面上の最大せん断抵抗力（もしくは抵抗モーメント）の総和との大小関係から，式(1)のように定義される。

$$F_s = \frac{\sum \text{すべり面上の最大せん断抵抗力 (もしくは抵抗モーメント)}}{\sum \text{すべり土塊に作用する滑動力 (もしくは滑動モーメント)}} \quad \dots\dots\dots(1)$$

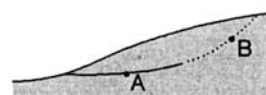
全体安全率がちょうど1となった時に斜面は崩壊する。また全体安全率が大きければ大きいほど，斜面は崩壊に対して高い安全性を有していることになる。地すべり対策工の効果も通常は全体安全率をもとに評価される。

次に斜面崩壊の力学機構について考えてみよう。斜面がすべり面を伴い崩壊する時，すべり面上では土が破壊状態に至っている。見方を変えれば，破壊状態に至った土の集合体が斜面を貫通する面を形成した時に，斜面は崩壊すると言える。図-1(a)は崩壊した斜面，図-1(b)は斜面が崩壊する寸前の状態を示した模式図である。これらをもとに，すべり面近傍の土の応力状態を検討してみよう。

土の応力ひずみ関係が弾完全塑性モデルという単純なモデルで表されると仮定すると，図-1(b)のA点とB点における応力状態はそれぞれ図-2(a)と(b)のように模式



(a) 崩壊時



(b) 崩壊寸前

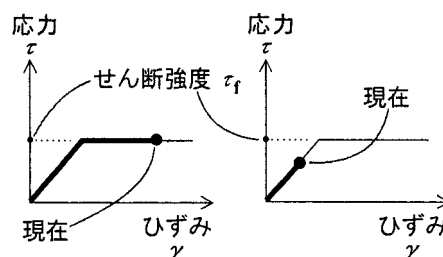
図-1 すべり面を伴う斜面崩壊

的に表される。B点における応力はせん断強度 τ_f に達していないが，降雨や地震などにより外力条件が変化することで，将来せん断強度に至る可能性がある。B点の土が塑性化するという事は，すべり面がB点にまで達するという事である。

ここで式(1)に示した全体安全率について，もう一度検討してみよう。図-3は斜面内の力の釣合いに関する模式図である。図-2(a)の状態とは，図-3において，

$$\sum \text{すべり土塊に作用する滑動力} > \sum \text{すべり面上の最大せん断抵抗力} \quad \dots\dots\dots(2)$$

となった状態であり，もはや仮想すべり面上の土塊は静



(a) A点

(b) B点

図-2 各点（図-1(b)）の応力状態（弾完全塑性モデルの場合）

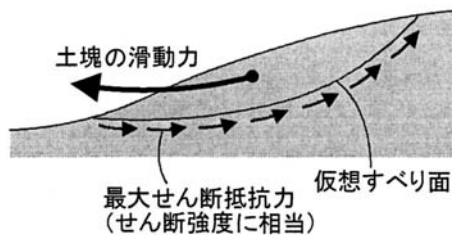


図-3 斜面内の力の釣合いの模式図

止出来ず、すべり出すことを意味する。式(2)から $F_s < 1$ が導けることは明らかであろう。

一方、図-2(b)の状態とは、図-3において、

$$\sum \text{すべり土塊に作用する滑動力} < \sum \text{すべり面上の最大せん断抵抗力} \dots\dots\dots(3)$$

である状態に相当する。仮想すべり面上の上部において最大せん断抵抗力（せん断強度 τ_f ）が発揮されなくとも、斜面内の力の釣り合いが満足されている。式(3)から $F_s > 1$ が導けることも明らかであろう。

土の破壊がMohr-Coulombの破壊規準に従う場合、仮想すべり面上の各位置における最大せん断応力（せん断強度 τ_f ）は次式で表される。

$$\tau_f = c + \sigma \tan \phi \dots\dots\dots(4)$$

c , ϕ は粘着力、内部摩擦角、 σ はすべり面上の垂直応力である。地下水による間隙水圧を考慮する場合は、式(4)のような全応力規準ではなく、有効応力規準（ σ , c , ϕ の代わりに、 σ' , c' , ϕ' を用いたもの）を適用する。すべり面上の有効（垂直）応力 σ' は、全（垂直）応力 σ から間隙水圧 u を差し引いたものである。以降は全応力規準に基づき議論を進める。

図-1(b)の斜面内の土の強度定数を c , ϕ とし、この斜面について求めた全体安全率を F とおく。次に、形状は図-1(b)と同一であるが、式(4)の τ_f を F で除した大きさのせん断強度を有する仮想的な斜面を考える。新たな土のせん断強度を $\tilde{\tau}_f$ とおくと、これは次式で表される。

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_f &= \frac{c + \sigma \tan \phi}{F} = \frac{c}{F} + \sigma \frac{\tan \phi}{F} \\ &= \tilde{c} + \sigma \tan \tilde{\phi} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

$\tilde{c}$, $\tilde{\phi}$ はSSRMの計算で使用する見かけの c , ϕ である。

当然のことながら、この斜面はちょうど崩壊する瞬間の状態にある。 $\tilde{\tau}_f$ に基づいて全体安全率を計算すると $F_s = 1$ が得られる。

以上から分かるように、斜面の全体安全率 F_s の別な定義として、“（仮想すべり面上の）土のせん断強度をある定数（通常 >1 ）で除した時に斜面が崩壊する場合、その定数が全体安全率 F_s に相当する”と言うこともできる。土の c , ϕ を徐々に低減させていく過程で斜面崩壊の瞬間を捉えるのが、SSRMの基本的発想である。

2.2.2 せん断強度低減有限要素法（SSRFEMと略）

SSRMに基づくFEMでは、まず式(5)の F を極めて小さ

な値とする。こうして得られた $\tilde{\tau}_f$ （極めて大きな値となる）を土のせん断強度に用い、力の釣り合い計算を行う。 $\tilde{\tau}_f$ が大きいということは、塑性化が生じないということであり、このためSSRMの計算第1ステップでは、斜面は弾性体として挙動する。

続いて F を若干増加させると、 $\tilde{\tau}_f$ がそれに応じて低減される。その条件下でもう一度力の釣り合い計算を行う。そしてさらに F を増加・・・これを繰り返すうちに、斜面内のどこかで塑性化が生ずる（図-4）。塑性化した要素では、降伏規準や塑性ポテンシャルに基づき応力補正がなされ、弾性状態とは異なった応力値が得られる。広く弾塑性FEMで用いられる修正Newton-Raphson法（例えば田中他1996）という非線形計算法では、一次的な釣り合い計算はすべて弾性を基本になされるので、図-5のように、塑性化した要素と塑性化していない要素との間には力の不均衡（残差力）が発生する。残差力は修正Newton-Raphson法に基づき、塑性化した要素以外の要素などに再配分（通常は隣接要素への負担が特に増加）される必要がある。こうしてうまく再配分が完了するまで、力の分配計算を繰返し行う。残差力のノルムが許容誤差範囲内に収まれば当該ステップの計算が収束したと判断して、次のステップに進む。

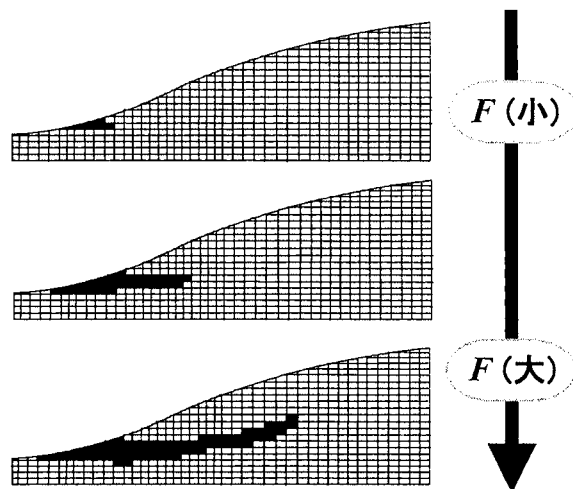


図-4 有限要素分割と塑性域（黒色部）の進展

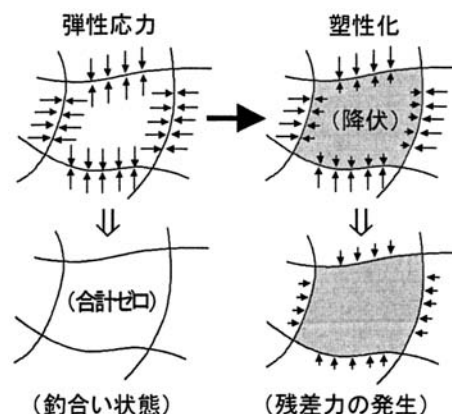


図-5 一部要素の塑性化と残差力の発生

こうして F を徐々に増加させる手順の繰返しにより、次第に塑性化する要素の個数が増え、また残差力の分配に要する繰返し計算の回数も増えていく。この繰返し回数はある時点から級数的に増加するので、上限値（例えば500回）を設けておくことにし、それを超えた場合には応力の再配分が困難と判断し、計算が発散したと考える。すなわち、斜面内の力の釣合いを満たすのに必要なせん断抵抗力を発揮できずに崩壊したことになる。この時点での F が当該斜面の全体安全率 F_s であるが、これが極限平衡法などにより得られる F_s と等価な物理的意味を有していることはすでに述べた。通常、塑性化した要素は大きなせん断ひずみが蓄積しているので、ひずみの大きさに基づいて斜面内を濃淡図化すると、図-6のようにすべり面の位置が可視化される。

SSRFMに基づくFEMの計算では、極限平衡法などのように、あらかじめすべり面の位置を固定することなく、計算の過程で自動的に最もすべりやすい面の位置が探索される。場合によっては、図-7のように、複数のすべり機構が発生することがあるが、これはほぼ同程度の崩壊可能性を有する機構が複数存在することを意味する。多くの場合、どちらか（図-7ではAの方）がわずかに先に斜面を貫通して崩壊機構を形成する。

以降では、SSRFEMを用いて斜面安定解析を行った例を示す。

2.2.3 SSRFEMによる斜面安定解析例

以下に示す2つの例において、極限平衡法とSSRFEMによる結果を比較し、SSRFEMの有効性を示す。他の例に関する比較は蔡ら（2003）の論文を参照されたい。

例1は図-8に示すような均一な斜面であり、土の内部摩擦角 ϕ は 10° 、粘着力 c は 9.8kPa 、単位体積重量 γ は 17.64kN/m^3 である。Yamagami and Ueta(1988)はMorgenstern-Price法を用いて安全率を計算し、DFP法、BFGS法、Powellの共役勾配法、シンプレックス法等、いくつかの最適化手法により臨界非円弧すべり面を探索

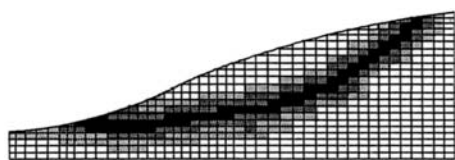


図-6 せん断ひずみ分布を基にすべり面位置を判断

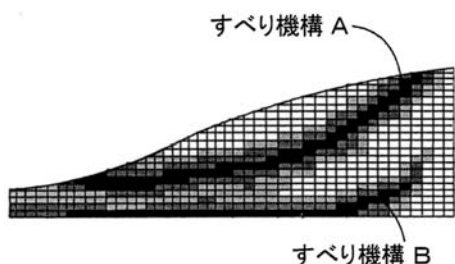


図-7 斜面崩壊機構に複数の候補がある場合

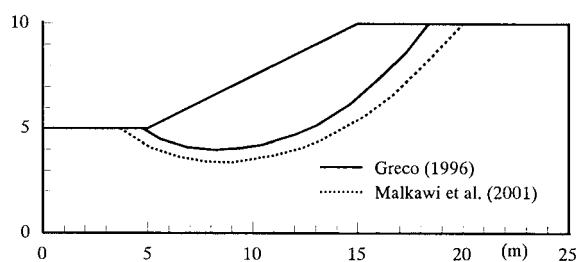


図-8 例1の斜面

した。Greco (1996)はSpencer法を用いて安全率を計算し、パターン・サーチとモンテカルロ法により臨界非円弧すべり面を探索した。Malkawi et al. (2001)はSpencer法を用いて安全率を計算し、モンテカルロ法により臨界非円弧すべり面を探索した。Rocscience Inc.(2002)は簡便法や簡易Bishop法を用いて安全率を計算し、オート・リファイン・サーチ法により臨界円弧すべり面を探索する一方、簡易ヤンプー法やSpencer法を用いて安全率を計算し、ランダム・サーチ法により臨界非円弧すべり面を探索した。

SSRFEMにより例1の斜面の全体安全率を計算した結果を図-9に示す。破壊直前の最大せん断ひずみ増分の分布から臨界すべり面位置を決定した（図-9に示すように、このひずみ増分が大きいほど、色が濃い）。最大せん断ひずみ増分が最も大きい位置と、従来の研究で指摘されているすべり面位置はほぼ一致しているのわかる。SSRFEMにより探索した臨界すべり面と簡易Bishop法の臨界円弧すべり面は特によく一致している。計算された全体安全率の比較を表-1に示す。

全体安全率を簡易Bishop法により計算したときの臨界円弧すべり面上におけるSSRFEM、簡便法、簡易Bishop法により計算した垂直応力とせん断応力の分布を図-10に示す。ここでのせん断応力は垂直応力から式(5)により計算した応力である。臨界円弧すべり面に沿った垂直応力の積分和はそれぞれ 563kN 、 505kN 、 570kN であり、SSRFEMの結果と簡易Bishop法の結果はほぼ同じであるが、簡便法の結果は最も小さいことがわかった。これより全体安全率の大小関係を説明できる。つまり、SSRFEMと簡易Bishop法を用いて計算した全体安全率はほぼ同じであるが、簡便法による全体安全率はやや小さい。

例2は傾斜した地層構造を持つ斜面であり、図-11に

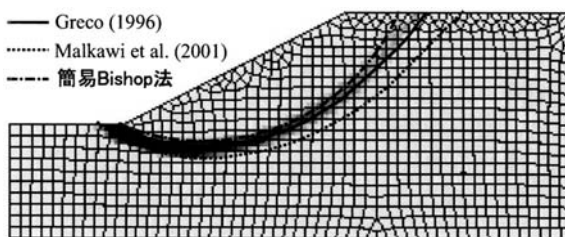


図-9 例1の臨界すべり面

表-1 例1の全体安全率

安全率計算法	臨界すべり面 探索法	全体安全 率
(a) Yamagami and Ueta (1988)		
Morgenstern-Price	BFGS	1.338
Morgenstern-Price	DFP	1.338
Morgenstern-Price	共役方向	1.338
Morgenstern-Price	Simplex	1.339-1.348
(b) Greco (1996)		
Spencer	Pattern search	1.327-1.330
Spencer	Monte Carlo	1.327-1.333
(c) Malkawi et al. (2001)		
Spencer	Monte Carlo	1.238
(d) Rocscience Inc. (2002)		
簡便法 (円弧)	Auto refine	1.278
簡易 Bishop (円弧)	Auto refine	1.347
簡易 Janbu (非円弧)	Random search	1.199
Spencer (非円弧)	Random search	1.342
(e) 本講座		
簡便法 (円弧)	Simplex	1.275
簡易 Bishop (円弧)	Simplex	1.343
FEM ($\psi = 0$)	FEM ($\psi = 0$)	1.339
FEM ($\psi = \phi$)	FEM ($\psi = \phi$)	1.343

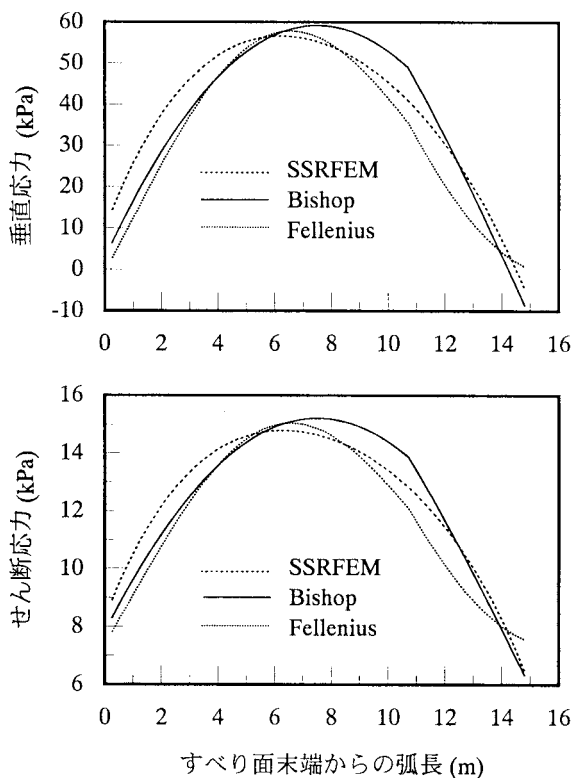


図-10 臨界円弧すべり面上における垂直応力とせん断応力

示すように層①と層③の間にせん断強度が小さい層②がはさまれている。材料の特性を表-2に示す。Arai and Tagyo (1985) は簡易ヤンプー法を用いて安全率を計算し、共役勾配法により臨界すべり面を探索した。同じ斜

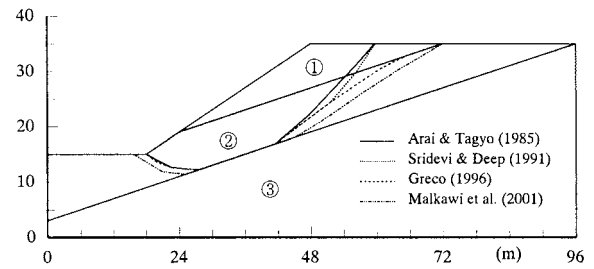


図-11 例2の斜面

表-2 例2の材料特性

Layer	$\phi'(^{\circ})$	$c'(\text{kPa})$	$\gamma(\text{kN/m}^3)$
①	12	29.4	18.82
②	5	9.8	18.82
③	40	294.0	18.82

面に対してSridevi and Deep (1992) は簡易ヤンプー法を用いて安全率を計算し、ランダム・サーチ法により臨界すべり面を探索した。Greco (1996) はSpencer法を用いて安全率を計算し、パターン・サーチとモンテカルロ法により臨界すべり面を探索した。Malkawi et al. (2001) はSpencer法を用いて安全率を計算し、モンテカルロ法により臨界すべり面を探索した。Kim et al. (2002) はSpencer法を用いて安全率を計算し、ランダム・サーチ法により臨界すべり面を探索した。Rocscience Inc.(2002) は簡易ヤンプー法やSpencer法を用いて安全率を計算し、ランダム・サーチ法により臨界すべり面を探索した。Greco (1996) とKim et al. (2002) の探索した臨界すべり面はほぼ一致している。またArai and Tagyo (1985) とRocscience Inc.(2002) の探索した臨界すべり面はほぼ同じである。Kim et al.(2002) は極限解析によりこの例を解析した。

ここでは、SSRFEMにより斜面の全体安全率を計算し、破壊直前の最大せん断ひずみ増分の分布から臨界すべり面位置を決定した。計算された全体安全率を表-3に示す。図-12に示すように、SSRFEMによる臨界すべり面(図-12)は、Greco (1996) の探索した臨界すべり面とよく一致している。特に、斜面の天端付近にある臨界すべり面の一部は層①と②の境界面に沿っていることをよく表現している。しかしながら、極限平衡法を用いて安全率を計算し、最適化手法により探索した6つの臨界すべり面(これらのうち4つが図-11に示されている)のうち、SSRFEMによる臨界すべり面とほぼ一致したのは、2つ(これらのうち1つが図-12に示されている)しかないことがわかった。したがって、解析の前に、すべり面の形状を仮定する必要があるSSRFEMのような安定解析法は他の手法に比べてより優位にあると考えられる。

表-3 例2の全体安全率

安全率計算法	臨界すべり面 探索法	全体安全率
(a) Arai and Tagyo (1985)		
簡易 Janbu	共役勾配法	0.405, 0.430*
(b) Sridevi and Deep (1992)		
簡易 Janbu	RST-2	0.401, 0.423*
(c) Greco 1996		
Spencer	Pattern search	0.388
Spencer	Monte Carlo	0.388
(d) Malkawi et al. (2001)		
Spencer	Monte Carlo	0.401
(e) Rocscience Inc. (2002)		
Spencer	Random search	0.401
簡易 Janbu	Random search	0.410, 0.434*
(f) Kim et al. (2002)		
Spencer	Random search	0.44
Lower-bound	-	0.40
Upper-bound	-	0.45
(g) 蔡・鵜飼 (2003)		
FEM ($\psi = 0$)	FEM ($\psi = 0$)	0.417
FEM ($\psi = \phi$)	FEM ($\psi = \phi$)	0.423
* 簡易 Janbu 法の安全率を Janbu の修正係数 f_0 に乗じたものである。		

参考文献

- Arai, K., and Tagyo, K.(1985) : Determination of noncircular slip surface giving the minimum factor of safety in slope stability analysis, Soils and Foundations, Vol. 25, No. 1, pp. 43-51.
- 蔡 飛・鵜飼恵三 (2003) : 斜面安定性の評価-極限平衡法と弾塑

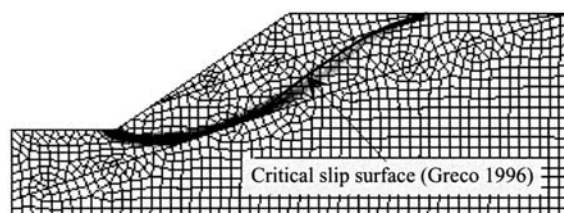


図-12 例2の臨界すべり面

性FEMとの比較, 地すべり, Vol. 39, No. 4.

- Greco, V.R.(1996) : Efficient Monte Carlo technique for locating critical slip surface, J. Geotech. Engrg., ASCE, Vol.122, No. 7, pp.517-525.
- Kim, J., Salgado, R., and Lee, J.(2002) : Stability analysis of complex soil slopes using limit analysis, J. Geotech. and Geoenviron. Eng., Vol. 128, No. 7, pp. 546-557.
- Malkawi, A.I.H., Hassan, W.F., and Sarma, S.K.(2001) : Global search method for locating general slip surface using Monte Carlo techniques, J. Geotech. and Geoenviron. Engrg., ASCE, Vol. 127, No. 8, pp. 688-698.
- Rocscience Inc.(2002) : Verification manual for Slide, 2D limit equilibrium slope stability for soil and rock slopes, Version 4.0, Rocscience Inc., Canada.
- Sridevi, B., and Deep, K.(1992) : Application of global-optimization technique to slope-stability analysis, Proc.6th Int. Symp. on Landslides, pp. 573-578.
- 田中忠次・鵜飼恵三他 (1996) : 地盤の三次元弾塑性有限要素解析, 丸善, pp.142-149.
- 鵜飼恵三 (1989) : 弾塑性FEMによる斜面の全体安全率の計算法, Soils and Foundations, Vol. 29, No. 2, pp. 190-195.
- Yamagami, T., and Ueta, Y.(1988) : Search for noncircular slip surfaces by the Morgenstern-Price method, Proc.6th Int. Conf. Numer. Methods in Geomech., pp. 1335-1340.
- Zienkiewicz, O.C., Humpheson, C. and Lewis, R. W.(1975) : Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics, Geotechnique, Vol. 25, No. 4, pp. 671-689.

(原稿受付2003年2月24日, 原稿受理2003年3月5日)