

2. FEMによる地すべり解析の基礎理論

Fundamental theories of FEM for landslide analysis

鵜飼恵三／群馬大学工学部

Keizo UGAI／Faculty of Engineering, Gunma University

キーワード：有限要素法，地すべり，弾塑性，基礎理論

Key words：finite element method, landslide, elasto-plastic, fundamental theory

2.1 弾塑性FEMの考え方（前編）

ここでは弾塑性FEMの概略的な考え方を記述する。紙数の関係で，他の多くの文献を引用せねばならなかった。ご容赦願いたい。

2.1.1 弾塑性とは

円筒形に整形した土の供試体を一軸または三軸試験のように軸方向に圧縮したとき，軸応力と軸ひずみの関係が図-1のように得られたとする。なお土質力学の慣例に従って，圧縮応力と圧縮ひずみを正と仮定する。今，小さな応力値である点A（図-1）まで載荷した後，除荷（応力をゼロに戻す）したところ，ひずみもゼロに戻ったとする。この性質を弾性と呼ぶ。次に点Bまで載荷後，除荷したところ残留ひずみOB'が生じたとする。この性質を塑性と呼ぶ。点Bの状態では，供試体に弾性ひずみと塑性ひずみの両方が生じており，この性質を弾塑性と呼ぶ。

2.1.2 FEMとは

図-2のような仮想的な均質斜面（二次元）に自重が作用したときの応力状態を，FEMで計算する問題を考える。簡単のため斜面内の間隙水圧はゼロとする。FEMでは，斜面を多数の小さな要素（三角形か四角形）に分割し，要素の辺上にいくつかの節点を定める。各要素内で変位の近似式を定義して，節点での変位の値を未知数とする。各要素内で，力とモーメントのつりあい式，変位とひずみの関係式，及び応力とひずみの関係式が，近似的に満たされるように定式化して，これを斜面全体に重ね合わせ，連立一次方程式を作成する。この連立一次

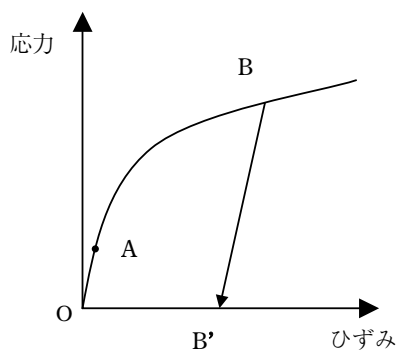


図-1 円筒形供試体を軸方向に圧縮したときの応力ひずみ関係

方程式を与えられた境界条件のもとで解くことにより，変位や応力の分布を得ることができる。非線形問題では，連立一次方程式を使って繰り返し計算を行うことで，解が得られる。

斜面を四辺形要素で分割した例を図-2に示す。斜面には最初自重が作用しておらず（つまり最初は無重力状態），そこに自重が作用して斜面が変形したとする。このような自重の作用とそれによる斜面の変形は，解析上の仮想的なものであり，実際の斜面で起こる現象ではない（なお遠心力載荷実験ではこのような現象が起こる）。しかしながら，自重が作用した結果として生じる斜面内の応力分布は，実際の（同じような条件下にある）斜面内の応力状態をある程度表現していると考えられる。

2.1.3 弾性FEMについて

簡単な例から始めよう。図-3のような二次元の弾性トラス構造が自重などの外力を受けて，変形する場合を考える。部材の結合点（三角形の頂点）はヒンジであるとし，これを節点と呼ぼう。構造力学の知識を借りると，トラス構造全体の節点の変位ベクトル $\{U\}$ と節点に作用

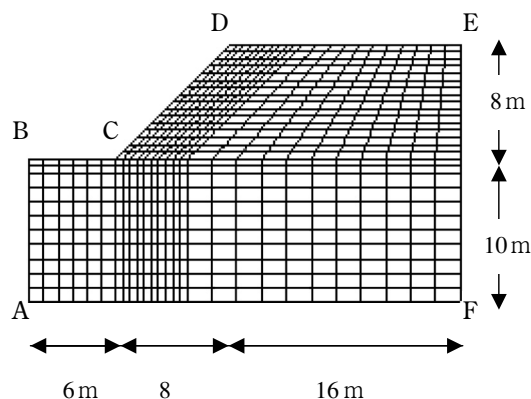


図-2 仮想的な斜面とメッシュ分割例

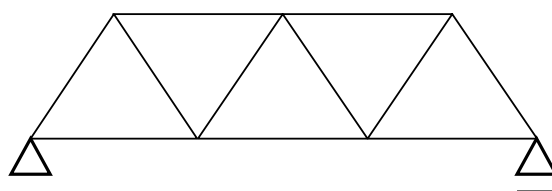


図-3 弾性トラス構造の例

する外力ベクトル $\{F\}$ の間には次のような関係が得られる。

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで、マトリクス $[K]$ はトラス部材の剛性を表す。節点の境界条件を式(1)に代入して、連立一次方程式を解くことにより、未知の節点変位が計算される。

二次元弾性体を対象とする弾性FEMからも式(1)と同じ形の式が最終的に得られる。いま図-2の斜面が均質・等方の弾性体（二次元平面ひずみ状態）であると仮定して、自重が作用したときの変形と応力分布を求めてみよう。計算の考え方と方法は、ウェブサイト（<http://geotech.ce.gunma-u.ac.jp/ga/>の“FEMのいろは”を参照¹⁾）と文献2）に示した。このウェブサイトには、二次元弾性FEMの基礎理論からFEMプログラムまでの説明がなされている。三次元弾性FEMについては文献3）を参照されたい。

図-2の弾性斜面に自重が作用したときの変位と最小主応力の分布を図-4に示す。ヤング率 $E=200000\text{kPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.25$ 、単位体積重量 $\gamma=20\text{kN/m}^3$ とした。最小主応力は斜面内各点での垂直応力の最小値を表し、負値であると引っ張り応力が生じていることを意味する。図-4より、自重が作用すると変形は鉛直下向きに生じ、引っ張り応力は生じていないことがわかる。しかし斜面が破壊状態に近いときは、これとは異なる状況が生じる。詳細は2.1（後編）で説明する。

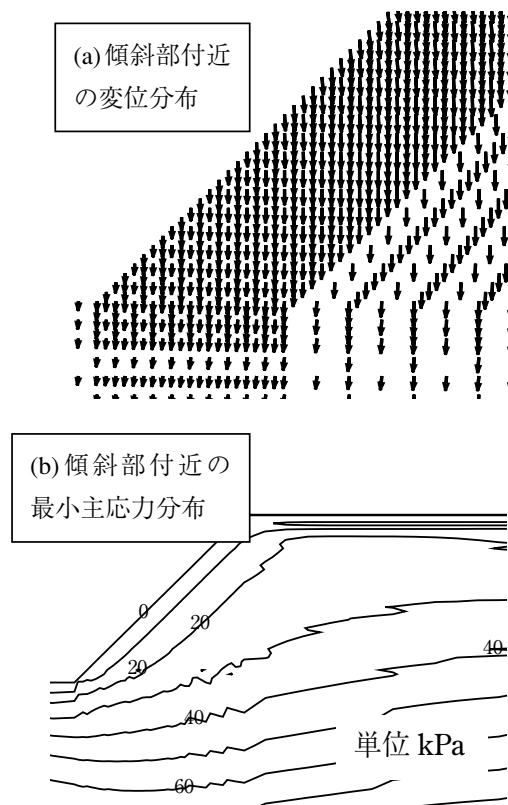


図-4 図-2の斜面に自重が作用したときの変位と最小主応力分布（弾性解析）

2.1.4 間隙水圧の取り扱いについて

斜面の変形や崩壊は、斜面内の間隙水圧が上昇して生じることが多いため、FEMにおいても間隙水圧の取り扱いが重要になる。その取り扱い方法を以下に説明しよう。

土のせん断強度 τ_f は、次の有効応力規準によって定義されるのが普通である。

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan \phi' \quad \dots\dots\dots(2)$$

従って τ_f を計算するには、すべり面上の有効垂直応力 σ' を求めねばならない。 σ' は、全応力 σ から間隙水圧 u を引いて得られる。すなわち、

$$\sigma' = \sigma - u \quad \dots\dots\dots(3)$$

式(3)をベクトル表示すると

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} - \{u\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

x , y 座標を用いると式(4)の各項は、次のように表される。右肩添え字の“ T ”はマトリクスもしくはベクトルの転置（行と列を置き換える）を表す。

$$\{\sigma'\} = (\sigma'_{xx} \ \sigma'_{yy} \ \tau_{xy})^T \quad \dots\dots\dots(5.1)$$

$$\{\sigma\} = (\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \tau_{xy})^T \quad \dots\dots\dots(5.2)$$

$$\{u\} = (u \ u \ 0)^T \quad \dots\dots\dots(5.3)$$

有効応力ベクトル $\{\sigma'\}$ に対する等価節点力ベクトルは

$$\iint [B]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \{\sigma'\} dx dy \quad \dots\dots\dots(6)$$

となる（文献1）参照）。積分は有限要素の面積内で行う。 $[B]$ は有限要素の節点変位ベクトルをひずみベクトルに変換するマトリクスである（文献1）参照）。従って、間隙水圧ベクトル $\{u\}$ に対する等価節点力ベクトルは、

$$\iint [B]^T [N]^T \{u\} dx dy \quad \dots\dots\dots(7)$$

となる。 $[N]$ は形状関数からなるベクトルである（文献1）、2）参照）。

なお、全応力ベクトル $\{\sigma\}$ に対する等価節点力ベクトルは、式(6)と同様に

$$\iint [B]^T \{\sigma\} dx dy \quad \dots\dots\dots(8)$$

となる。式(8)は、外力（たとえば重力や斜面表面に作用する外力）によって生じる節点力に等しい。式(6)、(7)、(8)は、1つ1つの有限要素に関するものである。斜面を構成するすべての要素についてこれらを足し合わせることで、斜面全体に対する等価節点力が得られる。以上に示した記号と数式の詳しい説明は、各箇所に示した文献に記述されているので、ぜひ参照されたい。

参考文献

- 1) <http://geotech.ce.gunma-u.ac.jp/ga/>の“FEMのいろは”
- 2) 田中忠次他（2000）：地盤工学における数値解析入門，pp.75-94，地盤工学学会。
- 3) 田中忠次，鵜飼恵三，河邑眞，阪上最一，大津宏康（1996）：地盤の3次元弾塑性有限要素解析，丸善。
（原稿受付2003年2月27日，原稿受理2003年3月5日）